**Ecole Louis de BROGLIE - EFREI - EISTI - ESCOM - ESEO - ESIEA**
**ESIEA Ouest - ESME Sudria - ESTIT - ISEB - ISEM - ISEN - ISEP - ITECH**

# CONCOURS ECRIN 1996

**SERIE M**

## COMPOSITION de MATHEMATIQUES - II

*La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.*

*Il est notamment demandé aux candidats* d'encadrer *les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.*

**"L'usage de la calculatrice est autorisé".**

### Notations et Résultats

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

  On note de même $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à $n$ lignes et une colonne à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de $A$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. S'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$, on dit que $B$ est *une* racine carrée de $A$.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $M$ est *symétrique définie positive* si et seulement si $M$ est symétrique et vérifie

$$\left(\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) \quad \left(X \neq 0 \Rightarrow {}^tX M X > 0\right)$$

  (où ${}^tX$ désigne la transposée de $X$).

  On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives.

- Enfin, on admet le résultat suivant :

  Soient $M_1$ et $M_2$ deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M_1 M_2 = M_2 M_1$. Alors il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $Q^{-1}M_1Q$ et $Q^{-1}M_2Q$ soient deux matrices diagonales.

**Question préliminaire**

$a$ est un réel strictement positif.

**a)** Montrer que les relations

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ (\forall\, k \in \mathbb{N}) \quad x_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_k + \dfrac{a}{x_k}\right) \end{cases}$$

définissent une suite à valeurs dans $]0, +\infty[$.

**b)** Prouver que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

## Partie I

**1°** **a)** Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

**b)** Montrer que la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées triangulaires inférieures.

**2°** **a)** Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que

$$B^2 = A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}\,(B) \neq 0\,.$$

**b)** Soient $n \geqslant 2$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inférieure écrite sous forme de matrice par blocs

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ V & B_1 \end{pmatrix}$$

où $b_{11} \in \mathbb{C}$, $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $B_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ est triangulaire inférieure.

Exprimer $B^2$ en fonction de $b_{11}$, $V$ et $B_1$.

**c)** Montrer par récurrence sur $n$, en utilisant **b)**, que toute matrice triangulaire inférieure inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (pour $n \geqslant 2$), admet au moins une racine carrée triangulaire inférieure ne possédant pas deux valeurs propres opposées.

**d)** En déduire que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une racine carrée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

## Partie II

**1°** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement positives.

**2°** Soient $M_1$ et $M_2$ deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$, vérifiant $M_1 M_2 = M_2 M_1$.
Montrer que le produit $M_1 M_2$ appartient à $\mathcal{S}_n^+$.

3° Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{S}_n^+$ admet une racine carrée appartenant à $\mathcal{S}_n^+$.

On *admet* l'unicité d'une telle matrice, qu'on notera $M^{1/2}$.

*Dans toute la suite du problème, $A$ désigne une matrice de $\mathcal{S}_n^+$, dont on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes.*

4° **a)** Montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $p-1$ tel que

$$(\forall\, i \in \{1, \ldots, p\}) \qquad P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}.$$

**b)** Pour $p \geqslant 2$, en déduire que

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^{p} \left( \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{j \neq i} (A - \lambda_j I) \right)$$

où $I$ désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**c)** Préciser $A^{1/2}$ lorsque $p = 1$.

5° Dans cette question seulement, on considère $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $A^{1/2}$.

6° Soit $M \in \mathcal{S}_n^+$ une matrice telle que $AM = MA$.

**a)** Justifier que $M$ est inversible et que $M^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$.

**b)** Soit $N = \frac{1}{2}\left(M + M^{-1}A\right)$. Montrer que $AN = NA$ et que $N \in \mathcal{S}_n^+$.

Ceci permet de définir une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{S}_n^+$ telles que

$$\begin{cases} B_0 = I \\ (\forall\, k \in \mathbb{N}) \quad B_{k+1} = \frac{1}{2}(B_k + B_k^{-1} A). \end{cases}$$

7° **a)** Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^{-1} B_k Q$ est une matrice diagonale $D_k$, qu'on notera

$$D_k = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

**b)** Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(\alpha_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

**c)** En déduire la convergence de la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.